Лекция 4.

Производная

Слайд 3.

Функции и их свойства

Функция - это некоторое соответствие x -> f(x), причём для каждого x определено единственное значение f(x). Например, f(x)=x2 или f(x)=sinx или как на графике (слайд 3 рис. 1),

где на оси Х откладываются значения х, а на оси У - соответствующие значения функции f(x).

Введем понятия области определения и области значений функции.

D(f) - область определения функции – это множество, на котором задается функция, то есть такие х, которые можно применить к функции. Например, к функции f(x)=x2 можно применить любые значения х, а к функции f(x)=√x – только неотрицательные числа.

E(f) - область значений функции – множество, состоящее из всех значений, которые принимает функция. Например, f(x)=x2 принимает значения от 0 до плюс бесконечности.

Будем работать только с функциями, у которых D(f) и E(f) - подмножество R.

Слайд 4.

Для закрепления этих понятий ответьте на вопрос: (слайд 4)

Каковы область определения и область значений следующих функций?

1) f(x) = 1 / (x-1)

2) f(x) = 2^x

Слайд 5 .

Ответ : (слайд 5)

1) D(f) = R \ {1}, E(f) = R \ {0}

2) D(f) = R, E(f) = (0, +inf).

Слайд 6.

Представление о функции, её свойствах и поведении можно получить, построив ее график. Функции бывают непрерывными и разрывными.

Рассмотрим график на рисунке2 (слайд 6 рис.2). Здесь мы видим, что при приближении к некоторой точке х0 и слева и справа график сходится в определенную точку. Но не ту, которая соответствует значению функции в точке х0. Такой разрыв называется устранимым. Устраняется он переопределением значения функции в точке х0 таким образом, чтобы оно было равно тому же значению, в котором «встречаются» ветки слева и справа.

На рисунке 3 мы видим другой тип разрыва. Здесь этот разрыв уже не устранить, так как при приближении к точке а ( и аналогично к b) слева и справа , значения функции сильно отличаются. «Кусочки» графика не встречаются как в предыдущем примере.

Аналогично, на рисунке4. Значение в точке а определено. Но при приближении к точке а справа, значение функции отлично от значения в самой точке а.

На рисунке 5 пример функции с бесконечным разрывом. Это когда при приближении к некоторой точке, значение функции стремиться к минус или плюс бесконечности.

Слайд 7.

Предел функции.

В предыдущих примерах, мы рассматривали значение, к которому стремится функция при приближении к определенной точке. Такое значение называется пределом.

Например, функция f(x)=(1+x) 1/x не определена в x=0, но её значение может быть вычислено в точках сколь угодно близких к ней. Пошагово подставляем 0,1 ; 0,01; 0,001 и т.д и вычисляем соответствующие значения.

Видим в таблице, что если в первой строке х приближается к нулю, то значение f(x)=(1+x) 1/x во второй строке приближается к некоторому числу. Это и есть предел функции f(x)=(1+x) 1/x при х→0.

Не у всех функций есть конечный предел. Как мы видели на рисунке 5 при приближении к пунктирной линии значение функции и справа «взлетает» в плюс бесконечность и уходит в минус бесконечность при приближении слева.

Также функция g(x)=1/x неограниченно растёт при приближении к x = 0, что тоже можно увидеть из таблицы.

Слайд 8.

Понятие предела тесно связано с понятием непрерывности функции в точке.

Функция непрерывна в точке a, если: (Слайд8)

То есть предел значений в этой точке должен быть равен самому значению в этой точке.

На рисунке изображен пример, когда это условие в точке х0 не выполняется и получается разрыв. Если взять любую другую точку на этом графике (кроме х0) и посчитать предел в ней, то он будет равен значению функции в этой точке. То есть во всех других точках данная функция непрерывна.

С помощью понятия пределаопределяется другое полезное понятие— понятие производной.

Слайд 9 .

Производная функции.

Производная - мгновенная скорость роста функции в заданной точке.

По сути, мы хотим узнать, насколько быстро меняется значение функции при изменении аргумента. Для этого мы делим разницу значений функции на разницу значений аргумента.

Давайте посмотрим на линейную функцию y=kx+b .

То есть, по коэффициенту к мы можем понять, как быстро прямая растет (или падает).

Как понять скорость роста для произвольной функции?

Рассмотрим рисунок (слайд9).

Будем определять скорость в крайней левой точке.

Если мы возьмем точку С4 и соединим с нужной точкой прямой линией, то разница между скоростью изменения этой прямой и нашим графиком окажется большой (на рисунке прямая «взлетает вверх» быстрее графика), так как большая разница между выбранной точкой и С4. Возьмем точку С3 поближе. Тогда прямая будет «взлетать» чуть более похоже на график. С точкой С2 поведение прямой еще больше приближается к графику и т.д. Чем ближе точки, тем точнее. То есть надо стремить разницу между иксами к нулю и смотреть к чему будет стремиться разница значений функции. То есть необходимо искать предельное положение секущей, то есть предел.

Таким образом, производная – это предел отношения разницы значений функции к разнице аргумента при стремлении разницы аргумента к нулю.

Еще одна интерпретация понятия производная – тангенс угла наклона касательной.

Это видно из рисунка. При приближении точек С4, С3, С2 к выбранной точке, прямые , являющиеся секущими графика, будут все теснее прижиматься к графику в заданной точке. И в пределе эти точки как бы сольются в одну, а секущая станет касательной.

Гладкие функции - функции, производная которых непрерывна. На рисунке изображена как раз гладкая функция.

Слайд 10.

Производная сложной функции

Пусть имеются 2 функции f(x) и h(x), и область значений f(x) принадлежит области определения h(x). Тогда, h(f(x)) - применение одной функции к результату другой, называется сложной функцией.

Пример: f(x) = x+1, h(x) = ln(x), g(x) = h(f(x)) = ln(x+1)

То есть, одна функция как бы завернута в другую функцию, и значение одной является аргументом другой.

Введем понятие дифференциала.

Дифференциал - линейная часть приращения функции . (слайд 10)

(умножаем производную на разницу аргумента, которую теперь будем обозначать не треугольником, а буквой d

Отсюда можно записать производную функцию через дифференциал

- это просто другая запись производной (для удобства).

Тогда производная сложной функции вычисляется по формуле:

Слайд 11.

Рассмотрим правила вычисления производной частного, произведения, суммы функций и функции, умноженной на число. (слайд11)

Вычислим производную сложной функции

f(x) = sin(ln(x)+5x).

Используя формулу производной сложной функции с предыдущего слайда, получим

f’(x) = cos(ln(x)+5x) \* (ln(x)+5x)’ .

Далее по формуле производной суммы имеем

f’(x) = cos(ln(x)+5x) \* (1/x + 5).

Слайд 12.

Экстремум функции.

Точка x0 - называется локальным минимумом функции f(x), если существует такая окрестность U(x0), для которой f(x) > f(x0), x из U(x0). Аналогично для максимума. В случае глобального минимума U(x0) = D(f).

Рассмотрим точку х1 на графике. Если мы возьмем небольшую окрестность рядом с ней, то есть значения икс рядом с х1, то увидим, что значения функции в этих точках, меньше значения в самой точке х1. То есть х1 – это как «вершина горы». Значит выполняется условие f(x) ‹ f(x1), для x из U(x1), то есть х1 – локальный максимум.

Аналогично, х2 – локальный минимум. Однако х2 не будет глобальным минимумом, так как условие f(x) > f(x2) будет выполняться лишь для тех точек, которые располагаются близко к х2, но не для всех х из области определения. И как видно по графику есть точки, которые еще ниже, чем х2.

Точки локальных максимумов и минимумов называют экстремумами функции.

Слайд 13.

Экстремум функции и производная.

Вспомним, что производная - это тангенс угла наклона касательной. Тогда, как видно из рисунков (слайд13), в точках локальных экстремумов производная (если она определена (!), пример дальше) обязана равняться нулю. Это необходимое условие.

Слайд14.

Однако равенство нулю производной не является достаточным условием локального экстремума.

Например, на рисунке слева в точке х=0 производная равна нулю, но точка не является экстремумом.

Также производная может быть вовсе не определена в точках локальных экстремумов. Это точки х1 и х2 на правом рисунке.

Слайд 15.

Выпуклость функции и вторая производная

Выясним, как влияет знак производной на характер поведения функции?

Рассмотрим график на слайде 12.

Если мы будем строить касательные ко всем точкам слева от х1, то все эти прямые будут направлены вверх, то есть коэффициент к у этих прямых положительный. А слева от х1 касательные направлены вниз, то есть коэффициент к ( а значит и производная) отрицательные. В самой точке х1, мы помним, что производная равна0.

Таким образом, получим (слайд 15)

1. f′(x)≥0 – функция возрастает;
2. f′(x)›0 – функция строго возрастает;
3. f′(x)≤0 - функция убывает;
4. f′(x)‹0 – функция строго убывает.

Слайд 16.

Введем понятие выпуклости и вогнутости функции. Для примера рассмотрим график.

Если мы соединим любую точку нижней ветви графика и х0, то окажется, что «отрезаная» часть графика окажется ниже этой прямой. Такую функцию называют выпуклой.

Если график окажется выше прямой, как будет на этом графике. То функцию называют вогнутой.

Понятия выпуклости и вогнутости функции связаны со второй производной.

А именно,

Слайд 17.

Помните необходимое условие локального экстремума? Наложив некоторые условия на вторую производную, можно сделать их достаточными!

И действительно. Если в точке х0 производная равна нулю, то касательная в этой точке параллельна ОХ. А раз вторая производная положительная, то это означает, что функция выпукла, что означает то. Что в точке х0 – минимум.

Слайд 18.

Еще раз посмотрим на графики выпуклой и вогнутой функций и проведём прямые, пересекающие их. Что можно сказать о положении графика относительно прямой?

Слайд 19.

Отсюда возникает более общее определение выпуклости/вогнутости функции. Вещественнозначная функция, определённая на некотором интервале, выпукла, если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа t ∈ [0, 1] выполняется:

То есть, если соединить две точки на графике отрезком, он окажется выше графика функции f(x).

Слайд 20.

Почему это определение более общее? Оно подходит и для функций, производная которых не определена в некоторых точках. Как например, на этих примерах.

.

**Notebook.**

Рассмотрим автоматическое вычисление производных с помощью python.

{Совет: если вы создаете массив из библиотеки numpy

arr = np.random.rand(1000000)

вы можете просто посчитать сумму с помощью функции sum

In [3]:%timeit sum(arr)

Или c помощью np.sum из numpy -библиотеки

%timeit np.sum(arr)

И это будет в разы быстрее. И другиефункции np работают быстрее обычных}

**Поиск экстремумов.**

Пусть дана некоторая функция

In [4]:**def** f(x):

**return** -1 \* np.sin(x)/x

мы находимся в точке х0 и хотим найти ближайший локальный минимум этой функции. Есть встроенная функция fmin (она импортируется из библиотеки scipy), которая это реализует.

In [6]:*# objective function*

x0 = -5 *# start from x = -5*

xmin0 = fmin(f,x0)

Если же вам нужно найти максимум, то необходимо ввести функцию f\_(х) = -f(х)

In [5]:**def** f\_(x):

**return** -f(x)

и найти ее минимум.

Например,

In [4]:**def** f(x):

**return** -1 \* np.sin(x)/x

In [5]:**def** f\_(x):

**return** -f(x)

In [6]:*# objective function*

x0 = -5 *# start from x = -5*

xmin0 = fmin(f,x0)

x1 = -4 *# start from x = -4*

xmin1 = fmin(f,x1)

In [7]:

*# objective function*

x0 = -5 *# start from x = -5*

xmin0 = fmin(f\_,x0)

x1 = -4 *# start from x = -4*

xmin1 = fmin(f\_, x1)

**Еще один способ поиска**

В библиотеке scipy есть встроенная функция electrocardiogram. Она создает массив на заданном интервале. Найти локальные максимумы, больше какого-либо заданного числа, можно с помощью функции find\_peaks, которая ищет пики на графиках выше определенной высоты. То есть все точки максимума, а не ближайшие как функция min.

Например,

In [8]:x = electrocardiogram()[3000:3500]

peaks, \_ = find\_peaks(x, height=0)

plt.plot(x)

plt.plot(peaks, x[peaks], "x")

plt.plot(np.zeros\_like(x), "--", color="gray")

plt.show()

Функцию find\_peaks можно применять и не только к электрокардиограмме,. Но и к любой функции. Например, здесь синус

In [10]:x = np.array([np.sin(xx) **for** xx **in** np.linspace(0, 10, 100)])

peaks, \_ = find\_peaks(x, height=0)

plt.plot(x)

plt.plot(peaks, x[peaks], "x")

plt.plot(np.zeros\_like(x), "--", color="gray")

plt.show()

Если нужен минимум, то вводим функцию равную –f(х) и ищем ее максимумы.

**Нахождение производной.**

Из библиотеки scipy импортируем функцию derivative. Она считает производную в заданной точке с указанием приращения. То есть дает небольшую погрешность.

Пример.

In [12]:**from** **scipy.misc** **import** derivative

**def** f(x):

**return** x\*\*3 + x\*\*2

derivative(f, 1.0, dx=1e-6)

Out[12]: 4.999999999921734

Здесь производная от f в точке х=1 с приращением dx=1e-6

А можно и нарисовать и саму функцию и производную (касательную). Для примера возьмем функцию f(х)=х2 +1 на интервале от -10 до 10. n=1 означает порядок производной

In [13]:**def** f(x):

**return** x \*\* 2 + 1

In [14]:x = np.linspace(-10, 10)

fx = f(x)

f1x = [derivative(f, xx, dx=1e-6, n=1) **for** xx **in** x]

In [15]:plt.plot(x, fx, label='function')

plt.plot(x, f1x, label='derivative')

plt.legend()

plt.show()

**Домашнее задание.**

### Задание 1

Придумайте функции со следующими свойствами (в a) b) c) область определения X любая, какая вам удобна, главное - функция с нужными свойствами):

a) бесконечное количество локальных экстремумов

b) 2 локальных экстремума

с) 3 локальных экстремума

d\*) область определения функции - 1 точка

### Задание 2:

Посчитайте 1-ую и 2-ую производные следующих функций (на бумажке:)):

a) f(x)=sin2(2x+1)

b) f(x)=ln(x3+2sin(x)) (выражение второй производной упрощать не нужно)

### Задание 3:

Используя numpy, посчитайте значение 3-ей и 4-ой производных функций в точке:

f(x)=x5+4sin(2x)+cos(3x+3) в точке x=1.